



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



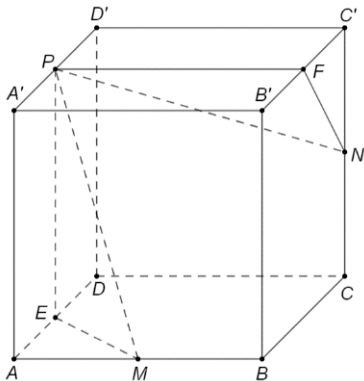
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

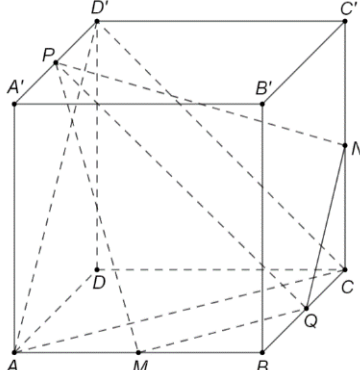
Etapa Locală- 2024

clasa a VIII-a

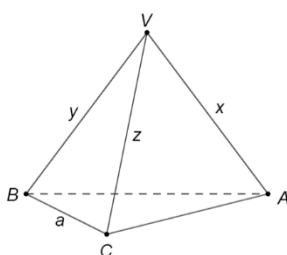
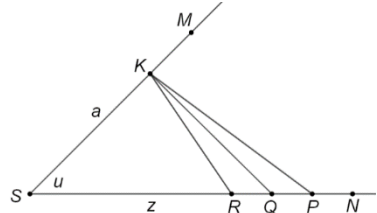
Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Subiectul 1		
1.a)	$(x-1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -6 \leq 3x \leq 12$	1p
	$(3y-2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow 3y-2 \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 3y-2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 3y \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq 6y \leq 10$	1p
	Deci $-8 \leq 3x+6y \leq 22 \Leftrightarrow a \in [-8, 22]$	1p
1.b)	$a = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$	1p
	$a = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$	1p
	$n^2 + 2n + 2 \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 - 2n + 2 \in \mathbb{N}.$	1p
	Cum a este număr prim și $n^2 - 2n + 2 \leq n^2 + 2n + 2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2 = 1$ $\Rightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$, pentru care se obține $a = 5$ care este număr prim	1p
TOTAL		7p
Subiectul 2		
2.a)	<p>Considerăm punctele E și F mijloacele segmentelor AD, respectiv $B'C'$</p> <p>$A'P \equiv B'F, A'P \parallel B'F \Rightarrow A'PFB'$ paralelogram</p> <p>$\Rightarrow PF \parallel A'B'$ și $PF \equiv A'B' \Rightarrow PF \perp (BCC')$</p> <p>Analog se arată că $AA'PE$ este paralelogram, de unde</p> <p>$PE \equiv AA'$ și $PE \parallel AA' \Rightarrow PE \perp (ABC)$</p>	1p
		1p
	<p>$\text{pr}_{(ABC)} PM = EM, \text{pr}_{(BCC')} PN = FN \Rightarrow \angle(PM, (ABC)) = \angle PME$ și</p> <p>$\angle(PN, (BCC')) = \angle PNF$</p> <p>Cum $AE \equiv C'F, AM \equiv C'N, \angle EAM = \angle NC'F = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEM \equiv \triangle C'FN \Rightarrow ME \equiv FN$</p> <p>$PE \equiv PF, ME \equiv FN, \angle PEM = \angle PFN = 90^\circ \Rightarrow \triangle PEM \equiv \triangle PFN$</p> <p>$\Rightarrow \angle PME \equiv \angle PNF$</p>	1p

	<p>Cum Q este mijlocul segmentului $BC \Rightarrow PD' \parallel QC$ și $PD' \equiv QC \Rightarrow D'PQC$ paralelogram $\Rightarrow PQ \parallel D'C$, $D'C \subset (D'AC) \Rightarrow PQ \parallel (D'AC)$</p>		1p
2.b)	<p>MQ este linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow MQ \parallel AC$, $AC \subset (D'AC) \Rightarrow MQ \parallel (D'AC)$ Cum PQ, $MQ \subset (PMQ)$, $PQ \cap MQ = \{Q\} \Rightarrow (PMQ) \parallel (D'AC)$ (1) NQ este linie mijlocie în $\triangle BCC' \Rightarrow NQ \parallel BC'$ $AB \equiv C'D'$ și $AB \parallel C'D' \Rightarrow ABC'D'$ paralelogram $\Rightarrow BC' \parallel AD'$ $\Rightarrow NQ \parallel AD'$, $AD' \subset (D'AC) \Rightarrow NQ \parallel (D'AC)$ Am demonstrat că $PQ \parallel (D'AC)$, $NQ \cap PQ = \{Q\}$ și NQ, $PQ \subset (NPQ)$ $\Rightarrow (NPQ) \parallel (D'AC)$ (2) Din relațiile (1) și (2), obținem $(NPQ) = (PMQ)$, de unde punctele M, N, P, Q sunt coplanare</p>		1p

Subiectul 4

4.	<p>Se poate presupune fără a restrânge generalitatea că $VA = x > VB = y > VC = z$</p>   <p>Notăm $AB = BC = CA = a$ și $\angle VAB = \angle VBC = \angle VCA = u$</p> <p>Construim în plan unghiul MSN de măsură u</p> <p>Pe semidreapta SM considerăm punctul K, astfel încât $SK = a$, iar pe semidreapta SN considerăm punctele P, Q și R, astfel încât $SP = x, SQ = y$ și $SR = z$</p> <p>$\triangle PSK \equiv \triangle VAB \Rightarrow PK = VB = y$</p> <p>$\triangle QSK \equiv \triangle VBC \Rightarrow QK = VC = z$</p> <p>$\triangle RSK \equiv \triangle VCA \Rightarrow RK = VA = x$</p> <p>În triunghiul RSK: $RK < QR + QK \Rightarrow x < y - z + z \Rightarrow x < y$ contradicție</p> <p>Analog se obține contradicție dacă presupunem $x > z > y$, $y > z > x$, $y > x > z$, $z > x > y$ sau $z > y > x$. Deci cel puțin două dintre numerele x, y și z sunt egale</p> <p>Putem presupune că $x = y \Rightarrow \triangle VAB \equiv \triangle VBC \Rightarrow VB = VC \Rightarrow y = z \Rightarrow x = y = z$</p> <p>Așadar $VABC$ este o piramidă regulată $\Rightarrow VO \perp (ABC)$</p> <p>Analog pentru $y = z$ sau $z = x$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
TOTAL		7p